**Trabajo Práctico N° 4:**

**Sucesión e Inducción.**

**Ejercicio 1.**

*Hallar los 4 primeros términos de las siguientes sucesiones:*

**(a)** *= , h 1.*

= = -1 \* 3= -3.

= = 1 \* 9= 9.

= = -1 \* 27= -27.

= = 1 \* 81= 81.

**(b)** *= 2j + , j 1.*

= 2 \* 1 + = 2 + 3= 5.

= 2 \* 2 + = 4 + 9= 13.

= 2 \* 3 + = 6 + 27= 33.

= 2 \* 4 + = 8 + 81= 89.

**(c)** *= - 1, t 1.*

= - 1= 2 - 1= 1.

= - 1= 4 - 1= 3.

= - 1= 8 - 1= 7.

= - 1= 16 - 1= 15.

**(d)** *= , h 1.*

= = 1.

= = 4.

= = 9.

= = 16.

**(e)** *= 4, = -3 + 2, k 2.*

= 4.

= -3= -3 \* 4= -12.

= -3= -3 (-12)= 36.

= -3= -3 \* 36= -108.

**(f)** *= -2, = 1, = 3 - , k 3.*

= -2.

= 1.

= 3 - = 3 \* 1 - (-2)= 3 + 2= 5.

= 3 - = 3 \* 5 - 1= 15 - 1= 14.

**(g)** *= 4, h 1.*

= 4.

= 4.

= 4.

= 4.

**(h)** *= 3, = - tan , k 1, esta sucesión genera aproximaciones del número .*

= 3.

= - tan = 3 - tan 3= 2,95.

= - tan = 2,95 - tan 2,95= 2,9.

= - tan = 2,9 - tan 2,9= 2,85.

**Ejercicio 2.**

*Hallar una definición, explícita o recursiva, para las siguientes sucesiones:*

**(a)** *1, -1, 1, -1, 1, -1, …*

Explícita:

= , n 1.

Recursiva:

= 1.

= -, n 2.

**(b)** *1, 8, 27, 64, 125, …*

Explícita:

= , n 1.

**(c)** *4, 9, 14, 19, 24, 29, …*

Explícita:

= 4 + (n - 1) \* 5, n 1.

Recursiva:

= 4.

= + 5, n 2.

**(d)** *-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, …*

Explícita:

= -3 + (n - 1) \* 2, n 1.

Recursiva:

= -3.

= + 2, n 2.

**(e)** *1, , , , , …*

Explícita:

= , n 1.

**(f)** *2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, …*

Recursiva:

= 2.

= 5.

= + , n 3.

**(g)** *-1, , , , , …*

Explícita:

= , n 1.

**(h)** *0, 5, 10, 15, 20, …*

Explícita:

= (n - 1) \* 5, n 1.

Recursiva:

= 0.

= + 5, n 2.

**Ejercicio 3.**

**(a)** *Dada la sucesión = , h 1. Encontrar , , y .*

= = .

= = .

= .

= = .

**(b)** *Dada la sucesión = -2, = 1, = 3 - , k 3. Encontrar , , y .*

= 3 - .

= 3 - .

= 3 - .

= 3 - .

**Ejercicio 4.**

*Dar una definición explícita para las siguientes sucesiones:*

**(a)** *4, 1, , , , …*

= 4 , n 1.

**(b)** *5, 15, 25, 35, 45, …*

= 5 + (n - 1) \* 10, n 1.

**(c)** *, , , , , …*

= , n= 1.

= , 1 n 3.

= , n= 4.

= , n= 5.

…

**(d)** *0, -4, 8, -12, 16, -20, …*

= (n - 1) \* 4, n 1.

**Ejercicio 5.**

*Algunas calculadoras utilizan un algoritmo similar al siguiente para calcular , para*

*un número n real positivo:*

*Sea = , encontrar aproximaciones sucesivas , , … mediante la siguiente fórmula: = ( + ), k 2 , hasta obtener la precisión deseada.*

*Utilizar este método para calcular y con una precisión de 6 cifras decimales.*

**(a)** 2,236068.

= = 2,5.

= ( + )= ( + )= ( + 2)= = = 2,25.

= ( + )= ( + )= ( + )= = = 2,236.

= ( + )= ( + )= ( + )= = = 2,236068.

**(b)** 4,242641.

= = 9.

= ( + )= (9 + )= = = 4,.

= ( + )= ( + )= ( + )= = = 2,854005.

**Ejercicio 6.**

*Analizar si las siguientes sucesiones son geométricas o aritméticas. Dar una definición explícita en todos los casos.*

**(a)** *1, 1, 1, 1, 1, …*

= 1 + 0n, n 1.

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(b)** *1, -1, 1, -1, 1, …*

= , n 1.

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(c)** *1, 2, 3, 4, 5, …*

= 1 + (n - 1), n 1.

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(d)** *4, 5, 6, 7, 8, …*

= 4 + (n - 1), n 1.

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(e)** *13, 20, 27, 34, 41, …*

= 13 + (n - 1) \* 7, n 1.

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(f)** *8, , , , …*

= 8 , n 1.

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

**(g)** *= 2n, n 1.*

Por lo tanto, es una sucesión aritmética.

**(h)** *= , n 1.*

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

**(i)** *10, , 9, , 8, .*

= 10 , n 1.

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

**(i)** *300, -30, 3, -0,3, ….*

= \* 300 , n 1.

Por lo tanto, es una sucesión geométrica.

**Ejercicio 7.**

*Analizar si las siguientes sucesiones son geométricas o aritméticas. Dar el primer término y diferencia o primer término y razón según corresponda.*

**(a)** *= 7 (1 + n) + 2, n 1.*

= 7 (1 + \* 1) + 2

= 7 (1 + ) + 2

= 7 + 2

= 10 + 2

= 12.

= 7 (1 + \* 2) + 2

= 7 (1 + ) + 2

= 7 + 2

= 13 + 2

= 15.

d= -

d= 15 - 12

d= 3.

Por lo tanto, esta sucesión es aritmética.

**(b)** *= 5 \* , n 1.*

= 5 \*

= 5 \*

= .

= 5 \*

= 5 \*

= 5 \* 1

= 5.

r=

r=

r= 2.

Por lo tanto, esta sucesión es geométrica.

**(c)** *= 3 \* , n 1.*

= 3 \*

= 3 \*

= 3 \* 16

= 48.

= 3 \*

= 3 \*

= 3 \* 64

= 192.

r=

r=

r= 4.

Por lo tanto, esta sucesión es geométrica.

**(d)** *= 5 ( - n), n 1.*

= 5 ( - 1)

= 5 ()

= -1.

= 5 ( - 2)

= 5 ()

= -6.

d= -

d= -6 - (-1)

d= -6 + 1

d= -5.

Por lo tanto, esta sucesión es aritmética.

**(e)** *= 2 , n 1.*

= 2

= 2

= .

= 2

= 2

= .

r=

r=

r= .

Por lo tanto, esta sucesión es geométrica.

**Ejercicio 8.**

*El tercer término de una sucesión aritmética es 85 y el decimocuarto es 30, hallar el primer término y la diferencia.*

.

85 - 30= ( + 2d) - ( + 13d)

55= + 2d - - 13d

55= -11d

d=

d= -5.

= 85 - 2 (-5)= 85 + 10= 95.

= 30 - 13 (-5)= 30 + 65= 95.

Por lo tanto, el primer término y la diferencia son 95 y -5, respectivamente.

**Ejercicio 9.**

*Encontrar tres números f, g y h tales que 320, f, g, h, 20 sean los 5 primeros términos de una sucesión geométrica.*

=

20= 320

=

=

r=

r= .

f=

f= 320

f= 320

f= 160.

g=

g= 320

g= 320

g= 80.

h=

h= 320

h= 320

h= 40.

Por lo tanto, los tres números f, g y h son 160, 80, 40, respectivamente.

**Ejercicio 10.**

*Hallar el primer término y la diferencia de una sucesión aritmética sabiendo que la suma del tercer término y el octavo da 75 y la diferencia entre el noveno y el segundo es 49.*

+ = 75

+ 2d + + 7d= 75

2 + 9d= 75.

- = 49

( + 8d) - ( + d)= 49

+ 8d - + d= 49

9d= 49

d= .

2 + 9 = 75

2 + 49= 75

2= 75 - 49

2= 26

=

= 13.

Por lo tanto, el primer término y la diferencia son 13 y , respectivamente.

**Ejercicio 11.**

*La superficie de un triángulo rectángulo es 54 . Hallar la longitud de sus lados sabiendo que están en progresión aritmética. (Idea: Plantear la relación pitagórica del triángulo rectángulo y resolver la ecuación cuadrática para dejando fijo d).*

S=

S=

54=

+ d= 54 \* 2

+ d= 108

+ d - 108= 0.

+ =

+ + 2d + = + 4d + 4

2 + 2d + = + 4d + 4

2 + 2d + - - 4d - 4= 0

- 2d - 3= 0.

- 2 - 3= 0.

, =

, =

, =

, =

= = = 3.

= = = -1.

= 3

= 3d.

+ 3dd - 108= 0

9 + 3 - 108= 0

12 - 108= 0

12= 108

=

= 9

d=

d= 3.

= 3 \* 3

= 9.

= 9 + 3

= 12.

Por lo tanto, la longitud de sus lados es 9 cm y 12 cm, respectivamente.

**Ejercicio 12.**

*Se desea construir una escalera de pared de 16 escalones cuyas longitudes decrecen uniformemente de 50 cm en la base a 30 cm en la parte superior. Encontrar una fórmula para saber cuánto mide el escalón n.*

= + 15d

30= 50 + 15d

15d= 30 - 50

15d= -20

d=

d= .

= + (n - 1) (), n 2.

**Ejercicio 13.**

*Hallar el término especificado de la sucesión aritmética a partir de los términos dados:*

**(a)** *, siendo = 2 + y = 3.*

d= -

d= 3 - (2 + )

d= 3 - 2 -

d= 1 - .

= + 10d

= 2 + + 10 (1 - )

= 2 + + 10 - 10

= 12 - 9 .

**(b)** *, siendo = 47 y = 53.*

d= -

d= 53 - 47

d= 6.

= + 7d

47= + 7 \* 6

47= + 42

= 47 - 42

= 5.

**Ejercicio 14.**

*Encontrar la razón de una sucesión geométrica cuyo primer término es 320 y el séptimo*

*es 5.*

= 320.

=

5= 320

=

=

r=

r= .

Por lo tanto, la razon es .

**Ejercicio 15.**

*Hallar todos los posibles valores de r para una sucesión geométrica con los términos dados:*

**(a)** *= 3 y = 9.*

= 3

= 3

=

r= .

= 9

= 9

=

r= .

=

=

=

=

=

=

=

= .

r= = = .

r= = = .

**(b)** *= 4 y = .*

= 4

= 4

=

r=

r= .

=

=

=

r=

r=

r= .

=

= 2 \*

=

=

=

= 16.

r= = = .

r= = = .

**Ejercicio 16.**

*La cantidad de bacterias en cierto cultivo es, inicialmente, 500 y el cultivo se duplica todos los días.*

**(a)** *Encontrar la cantidad de bacterias en el día 2, día 3 y día 4.*

= 500.

d= 2.

= \* 2

= 500 \* 2

= 1000.

= \* 2

= 1000 \* 2

= 2000.

= \* 2

= 2000 \* 2

= 4000.

**(b)** *Dar una fórmula para hallar la población bacteriana en el día n.*

= , n 2.

**Ejercicio 17.**

*Habitualmente, se agrega cloro al agua de las piscinas para controlar los microorganismos. Si el nivel de cloro es mayor de 3 ppm (partes por millón), los nadadores sentirán ardor en los ojos e incomodidad en la piel; si el nivel baja a menos de 1 ppm, existe la posibilidad de que el agua tome color verde por la presencia de algas. El cloro debe agregarse al agua a intervalos regulares. Si no se agrega cloro a una piscina en un período de 24 hs, alrededor del 20% del cloro existente se disipará en la atmósfera y el 80% permanecerá en el agua.*

**(a)** *Determinar la sucesión que exprese la cantidad de cloro presente después de n días, si la piscina tiene ppm de cloro al principio y no vuelve a agregarse. Expresar la sucesión en forma recursiva y en forma explícita.*

Explícita:

= \* , n 2.

Recursiva:

.

= 0,8, n 2.

**(b)** *Si al inicio tiene 7 ppm, determinar el primer día en que el nivel de cloro baja de 3 ppm.*

3

7 \* 3

ln ln

(n - 1) ln 0,8 ln

n - 1

n - 1

n - 1 3,86

n 3,86 + 1

n 4,86.

Por lo tanto, si al inicio tiene 7ppm, el primer día en que el nivel de cloro baja de 3 ppm es el quinto día.

**Ejercicio 18.**

*Desarrollar las siguientes sumas:*

**(a)** *.*

= (2 \* 1 - 4) + (2 \* 2 - 4) + (2 \* 3 - 4) + (2 \* 4 - 4) + (2 \* 5 - 4) + (2 \* 6 - 4) + (2 \* 7 - 4).

**(b)** *.*

= ( - ) + ( - ) + ( - ) + ( - ) + ( - ) + ( - ).

**(c)** *.*

= (2 - ) + (2 - ) + (2 - ) + (2 - ) + (2 - ) + (2 - ) + (2 - ) + (2 - ) + (2 - ) + (2 - ).

**Ejercicio 19.**

*Completar las siguientes igualdades:*

**(a)** *= + .*

= + .

**(b)** *= - .*

= - .

**(c)** *= - .*

= - .

**(d)** *= + 4 + .*

= + 4 + .

**(e)** *= + .*

= + .

**(f)** *= + ….*

= + .

**(g)** *= + …..*

= + .

**(h)** *= + …..*

= + .

**Ejercicio 20.**

*Escribir las siguientes sumas utilizando la notación sigma:*

**(a)** *1 + 4 + 9 + 16 + 25 + … + 81.*

.

**(b)** *1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1.*

.

**(c)** *1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + 46.*

.

**(d)** *4 + 5 + 6 + 7 + 8 + … + 34.*

.

**(e)** *13 + 20 + 27 + 34 + 41 + … + [13 + (n - 1) \* 7].*

.

**(f)** *8 + + + + … + 8 .*

.

**(g)** *2 + 4 + 6 + 8 + … + 2t.*

.

**Ejercicio 21.**

*Dar el resultado de las siguientes sumas:*

**(a)** *.*

= +

= 4 + 4 \* 5

= 4 ( + + + ) + 20

= 4 (1 + 4 + 9 + 16) + 20

= 4 \* 30 + 20

= 120 + 20

= 140.

**(b)** *.*

= + + +

= .

**(c)** *.*

= 3 \* 2 + 4 \* 3 + 5 \* 4 + 6 \* 5 + 7 \* 6 + 8 \* 7

= 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56

= 166.

**(d)** *.*

= +

= 5 \* 1 + (-1)

= 5 - 1

= 4.

**(e)** *.*

= 200 \* 10

= 2000.

**(f)** *.*

= 63 \* 20

= 1260.

**Ejercicio 22.**

*Calcular las siguientes sumas de dos formas diferentes: a) aplicando la suma de una sucesión aritmética, b) aplicando las propiedades vistas de la sumatoria.*

**(a)** *.*

=

=

=

=

=

= 2010.

= +

= 4 + 30 \* 5

= 4 \* 465 + 150

= 1860 + 150

= 2010.

**(b)** *.*

=

=

=

=

=

=

=

= -1518.

= +

= -3 + 33 \* 2

= -3 ( - ) + 66

= -3 (561 - 33 \* 1) + 66

= -3 (561 - 33) + 66

= -3 \* 528 + 66

= -1584 + 66

= -1518.

**(c)** *.*

=

=

=

=

=

=

= 5130.

= +

= 45 \* 4 + 5

= 180 + 5 ( - )

= 180 + 5 (1035 - 45 \* 1)

= 180 + 5 (1035 - 45)

= 180 + 5 \* 990

= 180 + 4950

= 5130.

**(d)** *.*

=

=

=

=

=

= + h.

= +

= 3 + h \* 1

= 3 + h

= 3 + h

= 3 ( h + ) + h

= h + + h

= + h.

**Ejercicio 23.**

**(a)** *Dada la siguiente sucesión definida en forma recursiva =3 y = 4 + , si n 2, calcular .*

=

=

**(b)** *Dar el valor de .*

= -

= -

= -

=

= .

**Ejercicio 24.**

**(a)** *Dada la siguiente sucesión definida por sus primeros términos = -1, = 4, = 9, = 14, …, calcular .*

=

= .

**(b)** *Dar el valor de .*

= -

= -

= 50 (4 + ) - 10 (4 + )

= 200 + 50 - 40 - 10

= 160 + 50 - 10.

**Ejercicio 25.**

*Calcular la suma de los 200 primeros números naturales.*

=

= 100 \* 201

= 20100.

**Ejercicio 26.**

*Calcular la suma de los 100 primeros números impares.*

=

= 50 \* 200

= 10000.

**Ejercicio 27.**

*Una pila de troncos tiene 24 troncos en la base, 23 en la segunda hilera, 22 en la tercera, y así siguiendo hasta llegar a la capa superior en la que tiene 10 troncos. Encontrar la cantidad total de troncos en la pila.*

=

=

=

= 255.

Por lo tanto, la cantidad total de troncos en la pila es 255.

**Ejercicio 28.**

*Sabiendo que la suma de los 10 primeros términos de una sucesión aritmética es 50 y*

*el primer término es -2. Calcular la diferencia de la sucesión.*

= 50

= 50

5 (-2 + )= 50

-10 + 5= 50

5= 50 + 10

5= 60

=

= 12.

= + 9d

9d= -

9d= 12 - (-2)

9d= 14

d= .

Por lo tanto, la diferencia de la sucesión es .

**Ejercicio 29.**

*Pablo sumó todos los números enteros positivos de 4 dígitos, pero se salteó uno. La suma de Pablo es igual a 8499 veces el número que se salteó Pablo. Hallar el número que se salteó Pablo.*

8499x= - x

8499x + x=

8500x=

8500x=

8500x= 4500 \* 10999

8500x= 49495500

x=

x= 5823.

Por lo tanto, el número que se salteó Pablo es el 5823.

**Ejercicio 30.**

*Un ciclista avanza cuesta abajo a razón de 4 pies el primer segundo. En cada segundo sucesivo, avanza 5 pies más que en el segundo anterior. Si el deportista llega a la parte inferior del cerro en 11 segundos, encontrar la distancia total recorrida.*

=

=

=

=

= 319.

Por lo tanto, la distancia total recorrida es 319 pies.

**Ejercicio 31.**

*Si el primero de octubre ahorro 10 centavos, el 2 de octubre ahorro 20, el 3 de octubre ahorro 30 y así sucesivamente.*

**(a)** *¿Cuánto dinero ahorraré el 31 de octubre?*

= 10 + 30 \* 10

= 10 + 300

= 310.

Por lo tanto, el 31 de octubre ahorraré 3,10 pesos.

**(b)** *¿Cuánto dinero ahorraré en todo el mes de octubre?*

=

=

= 31 \* 160

= 4960.

Por lo tanto, ahorraré 49,60 pesos en todo el mes de octubre.

**Ejercicio 32.**

*Calcular las siguientes sumas:*

**(a)** *.*

=

=

=

=

= 2 [1 - ].

**(b)** *.*

=

=

=

= 1 - .

**(c)** *.*

=

=

= [1 - ].

**(d)** *.*

=

=

= -10 (1 - ).

**(e)** *.*

=

=

=

=

= 6 [1 - ].

**(f)** *.*

=

=

=

= (1 - ).

**(g)** *.*

=

=

= -5 \* (1 - )

= -5 \* + 5 \*

= -5 ( - ).

**(h)** *.*

=

=

= (1 - )

= +

= ( - ).

**Ejercicio 33.**

*Una pelota de ping pong se lanza desde una altura de 16 mts. En cada rebote, se eleva verticalmente de la altura alcanzada en la caída previa.*

**(a)** *¿A qué altura se elevará en el séptimo rebote?*

= 16

= 16

= .

Por lo tanto, a la altura que se elevará en el séptimo rebote es mts.

**(b)** *¿Cuál es la distancia total que la pelota recorrió después de ese tiempo?*

=

=

=

=

=

= 21,.

Por lo tanto, la distancia total que la pelota recorrió después de ese tiempo es 21, mts.

**Ejercicio 34.**

*Un mendigo le propuso a un avaro: “… durante este mes, le daré a usted un peso el primer día, dos pesos el segundo día, 3 el tercero y así sucesivamente. A cambio, usted sólo me dará 0,01 pesos el primer día, 0,02 pesos el segundo día, 0,04 pesos el tercero, 0,08 pesos el cuarto y así sucesivamente. El avaro aceptó entusiasmado y convinieron en realizar el pago a fin de mes. ¿Cuánto le deberá cada uno al otro al cabo de ese tiempo?*

=

= 15 (1 + 1 + 29)

= 15 \* 31

= 465.

=

= 15 (0,01 + 0,01 + 0,29)

= 15 \* 0,31

= 4,65.

Por lo tanto, al cabo de ese tiempo, el mendigo le deberá al avaro 465 pesos, mientras que el avaro le deberá al mendigo 4,65 pesos.

**Ejercicio 35.**

*Encontrar, en cada uno de los siguientes casos, el valor de verdad de P (1), P (2), P (3) y establecer si los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad:*

**(a)** *P (n): 2 + 6 + 10 + … + (4n - 2)= 2.*

P (n): = 2.

P (1): = 2 \*

P (1): 4 \* 1 - 2= 2 \* 1

P (1): 4 - 2= 2

P (1): 2= 2.

P (2): = 2 \*

P (2): 4 \* 1 - 2 + 4 \* 2 - 2= 2 \* 4

P (2): 4 - 2 + 8 - 2= 8

P (2): 8= 8.

P (3): = 2 \*

P (3): 4 \* 1 - 2 + 4 \* 2 - 2 + 4 \* 3 - 2= 2 \* 9

P (3): 4 - 2 + 8 - 2 + 12 - 2= 18

P (3): 18= 18.

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

**(b)** *P (n): 4 + 8 + 12 + … + 4n= 2n (n - 1).*

P (n): = 2n (n + 1).

P (1): = 2 \* 1 (1 + 1)

P (1): 4 \* 1= 2 \* 1 \* 2

P (1): 4= 4.

P (2): = 2 \* 2 (2 + 1)

P (2): 4 \* 1 + 4 \* 2= 2 \* 2 \* 3

P (2): 4 + 8= 12

P (2): 12= 12.

P (3): = 2 \* 3 (3 + 1)

P (3): 4 \* 1 + 4 \* 2 + 4 \* 3= 2 \* 3 \* 4

P (3): 4 + 8 + 12= 24

P (3): 24= 24.

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

**(c)** *P (n): = .*

P (n): = .

P (1): =

P (1): = .

P (2): =

P (2): = .

P (3): =

P (3): = .

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

**(d)** *P (n): - 1 es divisible por 4.*

P (n): ( - 1) mod 4= 0.

P (1): ( - 1) mod 4= 0

P (1): (9 - 1) mod 4= 0

P (1): 8 mod 4= 0

P (1): 0= 0.

P (2): ( - 1) mod 4= 0

P (2): (81 - 1) mod 4= 0

P (2): 80 mod 4= 0

P (2): 0= 0.

P (3): ( - 1) mod 4= 0

P (3): (729 - 1) mod 4= 0

P (3): 728 mod 4= 0

P (3): 0= 0.

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

**(e)** *P (n): - 1 es divisible por 3.*

P (n): ( - 1) mod 3= 0.

P (1): ( - 1) mod 3= 0

P (1): (4 - 1) mod 3= 0

P (1): 3 mod 3= 0

P (1): 0= 0.

P (2): ( - 1) mod 3= 0

P (2): (16 - 1) mod 3= 0

P (2): 15 mod 3= 0

P (2): 0= 0.

P (3): ( - 1) mod 3= 0

P (3): (64 - 1) mod 3= 0

P (3): 63 mod 3= 0

P (3): 0= 0.

Por lo tanto, los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad.

**Ejercicio 36.**

*Dar dos ejemplos de funciones proposicionales que sean teoremas sobre los números naturales.*

Ejemplo 1 (Teorema de la suma de los primeros n números naturales):

“Para todo número natural n, la suma de los primeros n números naturales es igual a ”.

Formalmente, se puede representar como una función proposicional:

P (n): 1 + 2 + 3 + … + n= .

Ejemplo 2 (Teorema del producto de los primeros n números naturales):

“Para todo número natural n, el producto de los primeros n números naturales es igual a n factorial (n!)”.

Formalmente, se puede representar como una función proposicional:

Q (n): 1 \* 2 \* 3 \* … \* n= n!.

**Ejercicio 37.**

*Dar dos ejemplos de funciones proposicionales que no sean teoremas.*

Ejemplo 1:

P (n): “n es un número primo”.

Ejemplo 2:

Q (n): + 2n + 1= 0.

**Ejercicio 38.**

*Utilizando el principio de inducción matemática, demostrar las siguientes afirmaciones.*

**(a)** *2 + 4 + 6 + 8 + … + 2n= n (n + 1), para todo n, n natural.*

P (n): = n (n + 1), n .

P (1): = 1 (1 + 1)

P (1): 2 \* 1= 1 \* 2

P (1): 2= 2.

P (n + 1): = + 2 (n + 1)

P (n + 1): = n (n + 1) + 2 (n + 1)

P (n + 1): = (n + 1) (n + 2)

P (n + 1): = (n + 1) [(n + 1) + 1].

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**(b)** *= n (n + 1), para todo n, n natural.*

P (n): = n (n + 1), n .

P (1): = \* 1 (1 + 1)

P (1): 3 \* 1= \* 1 \* 2

P (1): 3= 3.

P (n + 1): = + 3 (n + 1)

P (n + 1): = n (n + 1) + 3 (n + 1)

P (n + 1): = (n + 1) (n + 2)

P (n + 1): = (n + 1) [(n + 1) + 1].

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**(c)** *= , para todo n, n natural.*

P (n): = , n .

P (1): =

P (1): =

P (1): 1=

P (1): 1=

P (1): 1= 1.

P (n + 1): = +

P (n + 1): = +

P (n + 1): =

P (n + 1): =

P (n + 1): =

P (n + 1): =

P (n + 1): =

P (n + 1): = .

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**(d)** *= , para todo n, n natural.*

P (n): = , n .

P (1): =

P (1): =

P (1): 1=

P (1): 1=

P (1): 1= 1.

P (n + 1): = +

P (n + 1): = +

P (n + 1): =

P (n + 1): =

P (n + 1): =

P (n + 1): =

P (n + 1): = .

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**(e)** *2n + 1 5n, para todo n, n natural.*

P (n): 2n + 1 5n, n .

P (1): 2 \* 1 + 1 5 \* 1

P (1): 2 + 1 5

P (1): 3 5.

P (n + 1): 2 (n + 1) + 1= 2n + 2 + 1

P (n + 1): 2 (n + 1) + 1= 2n + 1 + 2

P (n + 1): 2 (n + 1) + 1 5n + 5

P (n + 1): 2 (n + 1) + 1 5 (n + 1).

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**(f)**  *- 1 es divisible por 4, para todo n natural.*

P (n): ( - 1) mod 4= 0, n .

P (1): ( - 1) mod 4= 0

P (1): (9 - 1) mod 4= 0

P (1): 8 mod 4= 0

P (1): 0= 0.

P (n + 1): ( - 1) mod 4= 0

P (n + 1): ( \* 9 - 1) mod 4= 0

P (n + 1): [( - 1) \* 9 + 8] mod 4= 0

P (n + 1): 0= 0.

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**(g)**  *- 1 es divisible por 6, para todo n natural.*

P (n): ( - 1) mod 6= 0, n .

P (1): ( - 1) mod 6= 0

P (1): (7 - 1) mod 6= 0

P (1): 6 mod 6= 0

P (1): 0= 0.

P (n + 1): ( - 1) mod 6= 0

P (n + 1): ( \* 7 - 1) mod 6= 0

P (n + 1): [( - 1) \* 7 + 6] mod 6= 0

P (n + 1): 0= 0.

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**(h)** *= (n + 1)! - 1, para todo n, n natural.*

P (n): = (n + 1)! - 1, n .

P (1): = (1 + 1)! - 1

P (1): 1 \* 1!= 2! - 1

P (1): 1 \* 1= 2 - 1

P (1): 1= 1.

P (n + 1): = + (n + 1) (n + 1)!

P (n + 1): = (n + 1)! - 1 + (n + 1) (n + 1)!

P (n + 1): = (n + 1)! (n + 1 + 1) - 1

P (n + 1): = (n + 1 + 1)! - 1.

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**(i)** *= , para todo n, n natural.*

P (n): = , n .

P (1): =

P (1): 1 (1 + 1)=

P (1): 1 \* 2=

P (1): 2= 2.

P (n + 1): = + (n + 1) (n + 1 + 1)

P (n + 1): = + (n + 1) (n + 2)

P (n + 1): =

P (n + 1): =

P (n + 1): = .

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**(j)** *= 4 ( - 1), para todo n, n natural.*

P (n): = 4 ( - 1), n .

P (1): = 4 ( - 1)

P (1): 8 \* = 4 (3 - 1)

P (1): 8 \* = 4 \* 2

P (1): 8 \* 1= 8

P (1): 8= 8.

P (n + 1): = + 8 \*

P (n + 1): = 4 ( - 1) + 8 \*

P (n + 1): = 4 \* - 4 + 8 \*

P (n + 1): = 12 \* - 4

P (n + 1): = 4 \* 3 \* - 4

P (n + 1): = 4 \* - 4

P (n + 1): = 4 ( - 1).

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**(k)** *= n (3n - 2), para todo n, n natural.*

P (n): = n (3n - 2), n .

P (1): = 1 (3 \* 1 - 2)

P (1): 6 \* 1 - 5= 1 (3 - 2)

P (1): 6 - 5= 1 \* 1

P (1): 1= 1.

P (n + 1): = + 6 (n + 1) - 5

P (n + 1): = n (3n - 2) + 6n + 6 - 5

P (n + 1): = 3 - 2n + 6n + 1

P (n + 1): = 3 + 4n + 1

P (n + 1): = (n + 1) (3n + 1)

P (n + 1): = (n + 1) [3 (n + 1) - 2].

Por lo tanto, queda demostrada la afirmación P (n).

**Ejercicio 39.**

*Evaluar sin realizar la suma (no dejar de relacionarlo con el Ejercicio 38).*

**(a)** *.*

= -

= \* 34 (34 + 1) - \* 9 (9 + 1)

= 3 \* 17 \* 35 - \* 9 \* 10

= 1785 - 135

= 1650.

**(b)** *.*

= -

= -

= -

= -

= - 7 \* 13

= 42925 - 91

= 42834.

**(c)** *.*

= -

= 4 ( - 1) - 4 ( - 1)

= 4 \* - 4 - 4 \* + 4

= 4 \* - 4 \*

= 4 ( - ).

**(d)** *.*

=

= 2

= 2 ( - )

= 2 [20 (3 \* 20 - 2) - 3 (3 \* 3 - 2)]

= 2 [20 (60 - 2) - 3 (9 - 2)]

= 2 (20 \* 58 - 3 \* 7)

= 2 (1160 - 21)

= 2 \* 1139

= 2278.

**(e)** *.*

= 4

= 4 ( - )

= 4 [ -]

= 4 ( -)

= 4 ( -)

= 4 ( -)

= 4

= 1325450.